Recasages possibles : 234, 236, 250.
Référence : Analyse réelle et complexe, Rudin (p. 180), 40 développements, Bernis[2] (p. 264-265).

Développement

Théorème 1 (Fourier-Plancherel) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2$

Application 2 L'intégrale de Dirichlet vaut

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

- *Preuve du Théorème 1* : On pose $\tilde{f} : x \mapsto \overline{f(-x)}$, puis $g = f * \tilde{f}$. L'application g est bien définie presque partout car $f \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et ainsi la convolée existe presque partout et on a de plus $g \in L^1(\mathbb{R})$. On a plus précisément par le changement de variable $z = -y$,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\overline{f(-y)}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+z)\overline{f(z)}dy = \langle \tau_{-x} f, f \rangle,$$

où l'on a noté $\tau_{-x} f : z \mapsto f\big(z - (-x)\big) = f(x+z)$. Par continuité de $x \mapsto \tau_{-x} f$ de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R})$, et par continuité du produit scalaire, on voit que g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |g(x)| \leqslant \|\tau_{-x} f\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2^2.$$

Ainsi, g est bornée et vérifie $\|g\|_\infty \leqslant \|f\|_2^2$. Par propriétés de la transformée de Fourier, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}(\xi) = \widehat{f * \tilde{f}}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{\tilde{f}}(\xi).$$

Or, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{f}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-x)} e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} e^{ix\xi} dx \quad \text{par le changement de variables } x \leftarrow -x \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx} = \overline{\hat{f}(\xi)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)} = |\hat{f}(\xi)|^2$.

On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(x) = e^{-\frac{|x|}{n}}$, et on veut calculer $\widehat{H_n}$. Par définition, on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \widehat{H_n}(\xi) &= \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{n}} e^{-ix\xi} dx + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{n}} e^{-ix\xi} dx \\ &= \left[\frac{e^{\frac{x}{n}} e^{-ix\xi}}{\frac{1}{n} - i\xi} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-\frac{x}{n}} e^{-ix\xi}}{-\frac{1}{n} - i\xi} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{n} - i\xi} - 0 + 0 - \frac{1}{-\frac{1}{n} - i\xi} \\ &= \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + \xi^2} = \frac{2n}{1 + n^2\xi^2}. \end{aligned}$$

On pose alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n(\xi) = \frac{1}{2\pi}\widehat{H_n}(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2\xi^2} \geqslant 0$. Vérifions que (h_n) est une approximation de l'unité. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{1 + (nx)^2} dx = \frac{1}{\pi} [\arctan(nx)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \times \pi = 1.$$

De plus si $\eta > 0$, le même calcul, joint à la parité de h_n, donne

$$\int_{|x|>\eta} h_n(x) dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n\eta)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, (h_n) est bien une approximation de l'unité, et donc comme g est bornée et continue (donc continue en 0), on a

$$h_n * g(0) = \int_{\mathbb{R}} h_n(-x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} h_n(x) g(x) dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(0) = \|f\|_2^2.$$

Calculons alors d'une autre manière la limite de $g * h_n(0)$ quand n tend vers $+\infty$. On a

$$\begin{aligned} g * h_n(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) h_n(-\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \frac{1}{2\pi} \widehat{H_n}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} g(\xi) \int_{x=-\infty}^{+\infty} H_n(x) e^{-ix\xi} dx d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{+\infty} H_n(x) \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{-ix\xi} d\xi dx \quad \text{par Fubini} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) \hat{g}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) |\hat{f}(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

L'application de Fubini est licite car

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|H_n(x)||g(\xi)||e^{-ix\xi}|dxd\xi = \|H_n\|_1\,\|g\|_1 < +\infty.$$

Or, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_n(x)$ tend vers 1 en croissant lorsque $n \to +\infty$, par convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)|\hat{f}(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(x)|^2dx = \|\hat{f}\|_2^2.$$

Ainsi, par unicité de la limite, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(x)|^2dx = 2\pi\,\|f\|_2^2 < +\infty,$$

ce qui montre d'une part que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, et d'autre part que $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$. Ceci termine la preuve du **Théorème 1**, dit de *Fourier-Plancherel*.

- *Preuve de l'Application 2* : Posons $f = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}$. On a $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{2}$. Calculons $\hat{f}$: on a $\hat{f}(0) = 1$ et pour $\xi \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{x=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\xi}\frac{e^{-i\xi}-e^{i\xi}}{-2i} = \frac{\sin(\xi)}{\xi}.\end{aligned}$$

Calculons alors $\|\hat{f}\|_2$. On a

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}du = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}du \quad \text{par parité.}$$

Mais alors, par une intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}du &= \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(2u)}{2u^2}du \\ &= \left[-\frac{1-\cos(2u)}{2u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\sin(2u)}{u}du.\end{aligned}$$

Cette intégration par parties est licite car le crochet converge vers 0. En effet,

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{1-\cos(2u)}{2u} = 0 \quad \text{car cos est bornée sur } \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, au voisinage de 0, on a $\cos(2u) = 1 - \frac{(2u)^2}{2} + o(u^2) = 1 - 2u^2 + o(u^2)$, donc

$$\lim_{u\to0}\frac{1-\cos(2u)}{2u} = \lim_{u\to0}\frac{2u^2+o(u^2)}{2u} = \lim_{u\to0} u + o(u) = 0.$$

Ainsi, on obtient par le changement de variables $v = 2u$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}du = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(2u)}{u}du = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(v)}{\frac{v}{2}}\frac{dv}{2} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(v)}{v}dv.$$

Finalement, on a par le **Théorème 1**

$$\frac{1}{2} = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2^2 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(v)}{v}dv,$$

d'où

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(v)}{v}dv = \frac{\pi}{2}.$$

Ceci conclut la preuve de l'**Application 2** et le calcul de l'intégrale de *Dirichlet*.